

## Spelteori

### 1. Inledning

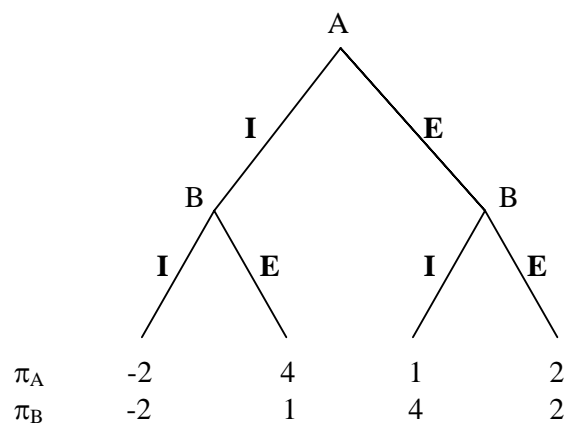
Strategisk interdependens, externaliteter.

Exempel: Investeringspel. Två företag, A och B, konkurrerar på en marknad. Båda har möjlighet att öka sin vinst genom att höja produktionskapaciteten med en investering, men om båda investerar blir det överkapacitet.

Fyra möjliga utfall:	Vinster (milj)	
	$\pi_A$	$\pi_B$
Både A och B investerar	-2	-2
Ingen investerar	2	2
A investerar, B investerar ej	4	1
A investerar ej, B investerar	1	4

Låt oss anta att A agerar först, sen ser B vad A gör och till sist agerar B.

Situationen kan beskrivas med ett träd:

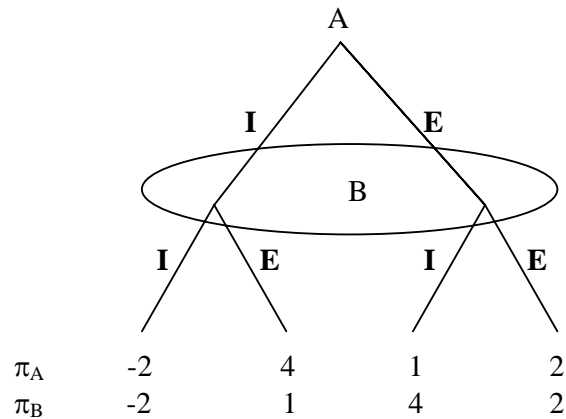


Vad kommer att hända i spelet? A vet om A:I så B:E och om A:E så B:I.

Alltså A:I. och B:E.

Om vi vänder på ordningsföljden får vi förstås det motsatta utfallet: A:E så B:I.

Anta i stället att A och B fattar sina beslut samtidigt. Hur markeras det i spelträdet? (Kan beskrivas med två olika spelträd beroende på vem som börjar.)



Svårare att nå fram till en bestämd förutsägelse.

Slutsats: Beslutens timing och spelarnas information viktiga.

Notera också: vanliga intuitioner om värdet av mer information gäller inte nödvändigtvis i spelsituationer. I exemplet: strategisk fördel för A när B kan observera A:s handling innan B handlar själv.

Statiska – Dynamiska spel  $\Rightarrow$  olika lösningsbegrepp.

Representationsformer: Extensiv form - Strategisk form (= normalform)

## 2. Statiska spel

### 2.1 Definition

Situation: Antal aktörer, alla kan välja mellan antal alternativ, var och en fattar beslut utan kännedom om andras val. Utfall varje aktör =  $f(\text{alla beslut})$

**Def:** *Spel i strategisk form* (normalform):

- mängd **spelare**  $I = \{1, \dots, n\}$
- för varje spelare  $i$ , en mängd möjliga alternativ, (**rena**) **strategier**,  $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots\}$
- för varje spelare  $i$ , en nytta eller **payoff-funktion**  $u_i$  som beror på samtliga spelares strategier.

tolkning: om strategiprofil  $s = (s_1, \dots, s_n)$  väljes, får  $i$  payoff  $u_i(s)$ .

Exempel: Investeringspelet.  $I = \{A, B\}$

$S_A = S_B = \{\text{Investera}, \text{Ej investera}\} = \{I, E\}$

4 möjliga strategikombinationer

I tvåpersonersspel, lämpligt beskriva nyttor i (bi)matrisform:

		Spelare B		
		I	E	
Spelare A	I	-2	1	varje ruta: $u_B$
	E	-2	4	
		4	2	
		1	2	$u_A$

Kontext, spelarnas info före spelet: Traditionellt antas:

- alla spelarna (fullkomligt) **rationella**
- alla spelarna har **fullständig info** om spelets regler
- Rationalitet och fullständig info är **Common knowledge**

## 2.2 Lösningsbegrepp

Givet (statiskt) spel. Hur förutsäga utfallet?

Vissa fall enkla:

Fångarnas Dilemma

		Spelare 2	
		C	D
Spelare 1	C	2	5
	D	-2	0

D alltid bäst.

Dominans (strikt och svag), tvåpersonersfallet

**Definition:** låt  $s_1, t_1$  vara strategier för 1.

(i)  $s_1$  *dominerar*  $t_1$  *strikt* om

$$u_1(s_1, s_2) > u_1(t_1, s_2) \quad \text{för alla } s_2 \in S_2.$$

$t_1$  är då *strikt dominerad*.

(ii)  $s_1$  är *strikt dominant* om  $s_1$  strikt dominerar alla andra möjliga strategier för 1.

I exemplet: D är strikt dominant för båda spelarna. (D, D) är en *strikt dominansjämvikt*.

Upprepad (strikt) dominans

	L	R
U	3 1	1 4
D	2 0	4 3

Här gäller: U dominerar D strikt. Alltså U strikt dominant för 1.

Men: varken L eller R är dominerad för 2. Fast om vi tar bort D, så blir R strikt dominerad för 2. Bara (U,L) blir kvar. Spelet kan lösas med *upprepade strikt dominans* (egentligen *upprepade eliminering av strikt dominerade strategier*).

I större spel kan vi ibland upprepa elimineringsprocessen fler gånger.

Svag dominans.

	V	H
U	2 1	1 3
N	1 1	2 2

U alltid minst lika bra och (om 2 väljer H) strikt bättre än N.

**Definition:**  $s_1$  dominerar  $t_1$  svagt om

$$u_1(s_1, s_2) \geq u_1(t_1, s_2) \text{ för alla möjliga } s_2$$

och

$$u_1(s_1, s_2) > u_1(t_1, s_2) \text{ för något } s_2.$$

Notera:

1. Upprepad svagt dominans förekommer också men är inte lika övertygande som lösningsbegrepp. Till skillnad från strikt dominans kan resultatet bero på i vilken ordning strategier elimineras.
2. Vickrey-auktionen eller second-price-auktionen är ett exempel på en typ av spel som har en lösning i svagt dominanta strategier. Det är alltid svagt dominant att bjuda sin värdering.

### Nashjämvikt

I många spel kommer vi ingenvart med dominansargument.

Exempel: Ingen strategi är strikt eller svagt dominerad för någon spelare.

	L	M	R
U	2 0	<u>3</u> <u>1</u>	0 <u>4</u>
D	3 <u>1</u>	0 0	<u>4</u> 3

Hur skall vi göra? Leta efter strategikombination  $(s_1, s_2)$  så att

$s_1$  är bäst för 1 mot  $s_2$  och

$s_2$  är bäst för 2 mot  $s_1$ .

Detta är idén bakom Nashjämvikt.

Hur finna Nashjämvikt?

Stryk under 1:s (payofftal i) bästa svar mot varje möjlig  $s_2$  och vice versa.

Om i någon ruta båda talen är understrukna så har vi två strategier som är bästa svar mot varandra, en Nashjämvikt!  $\Rightarrow$  (U, M) i exemplet.

**Def:** Ett strategipar  $(s_1, s_2)$  är en *Nashjämvikt* om

- (1)  $u_1(s_1, s_2) \geq u_1(t_1, s_2)$  för alla möjliga  $t_1$
- (2)  $u_2(s_1, s_2) \geq u_2(s_1, t_2)$  för alla möjliga  $t_2$ .

Nashjämvikten är *strikt* om (1) och (2) gäller med  $>$  för alla  $t_i \neq s_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Annars har vi en *svag* Nashjämvikt.

I exemplet: (U,M) är en strikt Nashjämvikt.

Exempel med svag Nashjämvikt:

Ändra tidigare Exempel:

	L	M	R
U	<u>2</u> 0	<u>2</u> <u>1</u>	0 <u>4</u>
D	3 <u>1</u>	0 0	<u>4</u> 3

Jämvikten (U,M) är svag. Problem: Spelare 2 har inget incitament att välja just jämviktsstrategin M.

Samband Nashjämvikt-upprepad dominans:

**Sats:** Om  $(s_1, s_2)$  är Nashjämvikt, så överlever  $s_1$  och  $s_2$  upprepad strikt dominans.

Existensproblem, blandade strategier.

Exempel: *Matching Pennies*

	H	T
H	-1	1
	1	-1
T	-1	1

Finns ingen Nashjämvikt.

Men anta spelarna kan använda slumpmekanism.

Om Spelare 2 spelar  $0,5 H + 0,5 T$  (alltså H och T med samma sannolikhet 0,5) blir

$$u_1(H, \cdot) = 0,5 \cdot 1 + 0,5 (-1) = 0 \quad \text{och}$$

$$u_1(T, \cdot) = 0,5 (-1) + 0,5 \cdot 1 = 0$$

om vi antar att spelarna maximerar förväntad nytta.

Alltså: Spelare 1 indifferent mellan H och T.

Slutsats: Om vi tillåter slumpstrategier, *blandade strategier*, har Matching Pennies en

Nashjämvikt i vilken båda spelarna spelar  $0,5 H + 0,5 T$ .

**Sats 1:** I ett ändligt spel finns alltid minst en Nashjämvikt (om vi tillåter blandade strategier).

**Sats 2:** Nashjämvikt i blandade strategier är alltid svag. (Omvändning gäller inte.)

Mångtydighet

Exempel: Investeringsspelet, Battle of the sexes

Ofta svårt göra bestämd förutsägelse. Paretooptimalitet kontra riskövertvåganden.

### 3 Dynamiska spel

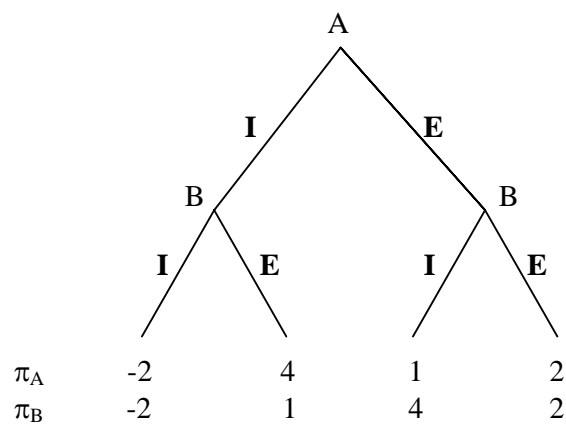
#### 3.1 Definition

Situation

Spel i extensiv form: spelare, ordningsföljd (mellan beslut), alternativ (handlingar),  
information, payoffs

⇒ Spelträd

Exempel: investeringsspelet igen



Informationsmängder

Perfekt – imperfekt information: informationsmängder, RITA!

I spel med perfekt information innehåller varje info-mängd bara en nod (beslutspunkt)

Alla (icke-triviala) statiska spel har imperfekt information.

Strategier i spel på extensiv form:

Handlingsplan för varje möjlig situation i spelet. ⇒

(Ren) strategi för spelare i består av en handling för varje info-mängd där i väljer.

Exempel: i investeringspelet har spelare A bara en info-mängd vilken innehåller två alternativ. Alltså har A två strategier:  $S_A = \{I, E\}$ .

Vad gäller för B? Två info-mängd med vardera två alternativ; alltså fyra strategier.

Kalla B:s info-mängder 1 (efter 1:I) och 2 (efter 1:E):

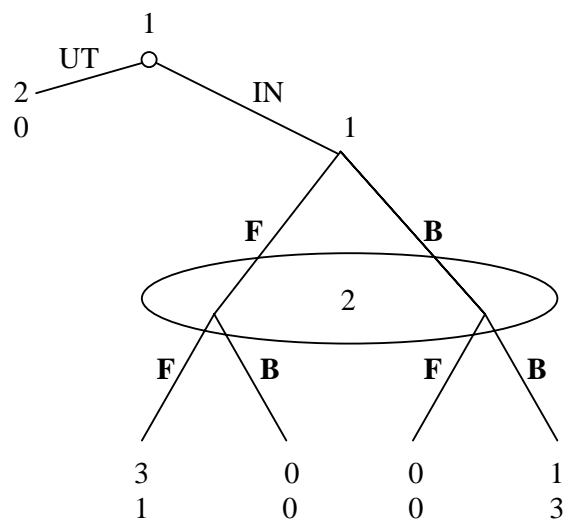
	Info-mängd	
	1	2
$s_{B1}$	I	I
$s_{B2}$	I	E
$s_{B3}$	E	I
$s_{B4}$	E	E

$$S_B = \{II, IE, EI, EE\}.$$

Övergång till strategisk form:

	II	IE	EI	EE
I	-2	-2	1	1
E	-2	-2	4	4
I	4	2	4	2
E	1	2	1	2

Exempel: Battle of the sexes med outside option för spelare 1



Strategisk form:

	F	B
IN+F	1 3	0 0
IN+B	0 0	3 1
UT+F	0 2	0 2
UT+B	0 2	0 2

Reducerad strategisk form:

	F	B
IN+F	1 3	0 0
IN+B	0 0	3 1
UT	0 2	0 2

### 3.2 Lösningbegrepp

Baklänges induktion (främst spel med perfekt information)

Delspelsperfekt jämvikt (mer generellt, kan även användas vid imperfekt information;  
ger samma resultat som BI vid perfekt information)

Nashjämvikt kan också användas, men är för svagt;

många NE uppenbart orimliga (som vi ska se).

Baklänges induktion (*backward induction*):

Spel med perfekt information: (om ändligt) bestäm optimala handlingar vid de sista beslutsnoderna; ersätt varje nod med payoff för det optimala draget och fortsätt baklänges.

Exempel: Inträdesspel 1: Potentiell konkurrent 2: Monopol

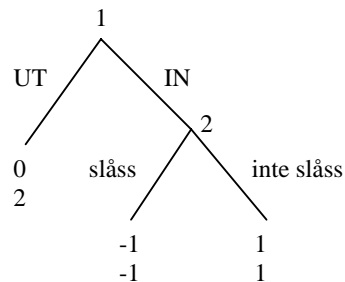
Regler: (i) 1 bestämmer IN eller UT

(ii) 2 observerar 1:s beslut, väljer sen att slåss eller inte slåss

Payoffs: 1 : UT  $\Rightarrow \pi_1 = 0, \pi_2 = \pi^M = 2$

1 : IN, 2 : inte slåss  $\pi_1 = \pi_2 = \pi^D = 1$

1 : IN, 2 : slåss  $\pi_1 = \pi_2 = -1$



Att straffa konkurrenten när han redan är på marknaden leder till kostnader för båda.

Alltså bättre för 2 inte slåss givet IN.

Formellt med baklänges induktion: 2 : inte slåss ( $1 > -1$ )  $\Rightarrow$  1 : IN ( $1 > 0$ ).

(IN, inte slåss) den självklara lösningen.

För att förstå varför Nashjämvikt inte fungerar, studera normalformen:

	Slåss	Inte slåss
IN	-1 -1	1 1
UT	2 0	2 0

Två Nashjämvikter: en strikt som svarar mot BI-lösningen,

men dessutom en (svag) NE till (UT, slåss) som svarar mot icke-trovärdigt hot.

Liknande fenomen uppträder i investeringsspelet: (I,EI) är BI-lösningen och NE, dock svag, Dessutom finns två andra (svaga) NE (E, II) samt (I,EE), den senare med samma utfall som (I,EI).

	II	IE	EI	EE
I	-2	-2	1	1
E	4	2	4	2
	1	2	1	2

**Sats:** Alla ändliga (förklara!) spel med perfekt information har minst en ren strategikombination som är förenlig med BI.

**Sats:** alla BI-lösningar är Nashjämvikter (omvändningen gäller, som vi sett, inte).

### Delspelsperfektion

Begränsning med BI: spelaren måste veta var i trädet han befinner sig.

Fungerar därför i allmänhet inte i spel med imperfekt information.

Delspelsperfektion i outside option-spelet:

(UT, B; B) och (IN, F; F) är SPE.

### 3.3 Upprepade spel

#### Fångarnas Dilemma

		Spelare 2	
		C	D
Spelare 1	C	2	5
	D	-2	0

Ändlig upprepning: (D,D) i varje period. (BI fungerar fast vi inte har perfekt information.)

Oändligt upprepade spel: BI fungerar inte: ingen sista period!

Anta diskontering med faktor  $\delta$ ,  $0 < \delta < 1$ .

”Dålig” jämvikt finns kvar: alltid (D,D) är SPE.

Men kan också finnas ”bra” jämvikter.

Triggerstrategier.

**Sats:** Två triggerstrategier utgör NE (och SPE) i oändligt uppr. F D om  $\delta$  tillräckligt högt.

**Bevis:** Ensidig avvikelse från trigger i period  $t$  ger högst

$$u(\text{avvika}) = 2(1 + \delta + \delta^2 \dots + \delta^{t-1}) + 5\delta^t + 0 + 0 + \dots$$

Payoff av trigger kan skrivas

$$u(\text{trigger}) = 2(1 + \delta + \delta^2 \dots + \delta^{t-1}) + 2(\delta^t + \delta^{t+1} + \dots).$$

Ta bort första delen i båda uttrycken och dela med  $\delta^t$  så ser man att

$$u(\text{trigger}) \geq u(\text{avvika}) \Leftrightarrow 2(1 + \delta + \delta^2 \dots) \geq 5 \Leftrightarrow 2/(1 - \delta) \geq 5 \Leftrightarrow \delta \geq 0,6.$$

Folkteorem